

CÁC PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ VÀ BÀI TẬP ỨNG DỤNG

I. Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

1- *Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách nhóm, tách, thêm, bớt hạng tử.*

Ví dụ 1: $x^4 + 5x^3 + 15x - 9$

Đa thức đã cho có 4 số hạng không thể đặt ngay nhân tử chung hoặc áp dụng ngay các hằng đẳng thức, vì vậy ta nghĩ tới cách nhóm các số hạng hoặc thêm bớt số hạng. Ta có thể phân tích như sau:

Cách 1:
$$\begin{aligned} & x^4 + 5x^3 + 15x - 9 \\ &= x^4 - 9 + 5x^3 + 15x \\ &= (x^2 - 3)(x^2 + 3) + 5x(x^2 + 3) \\ &= (x^2 + 3)(x^2 - 3 + 5x) \\ &= (x^2 + 3)(x^2 + 5x - 3) \end{aligned}$$

Cách 2:
$$\begin{aligned} & x^4 + 5x^3 + 15x - 9 \\ &= x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 3x^2 + 15x - 9 \\ &= x^2(x^2 + 5x - 3) + 3(x^2 + 5x - 3) \\ &= (x^2 + 3)(x^2 + 5x - 3) \end{aligned}$$

Bài này cần lưu ý học sinh trong tập hợp số hữu tỉ đa thức $x^2 + 5x - 3$ không phân tích được nữa.

Ví dụ 2: $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.

Giải: Đa thức đã cho có 7 số hạng lại không đặt nhân tử chung được mà có hạng tử $3xyz$ nên ta tách hạng tử $3xyz$ thành 3 hạng tử để sử dụng phương pháp nhóm hạng tử.

$$\begin{aligned} & x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz \\ &= x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 + xyz \\ &= x(xy + xz + yz) + y(xy + yz + xz) + z(xz + yz + xy) \\ &= (xy + xz + yz)(x + y + z). \end{aligned}$$

Ví dụ 3: $x^2 + 6x + 8$

Với các phương pháp đã biết như đặt nhân tử chung, nhóm số hạng, dùng hằng đẳng thức ta không thể phân tích được đa thức này. Nếu tách một số hạng thành hai số hạng để đa thức trở thành 4 số hạng thì có thể nhóm các hạng tử để xuất hiện

nhân tử chung hoặc xuất hiện các hằng đẳng thức ... Từ đó có nhiều khả năng biến đổi đa thức đã cho thành tích.

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= x(x+2) + 4(x+2) = (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } x^2 + 6x + 9 - 1 &= (x+3)^2 - 1 \\ &= (x+3-1)(x+3+1) = (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 3: } x^2 - 4 + 6x + 12 &= (x-2)(x+2) + 6(x+2) \\ &= (x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 4: } x^2 + 6x + 8 &= x^2 - 16 + 6x + 24 \\ &= (x-4)(x+4) + 6(x+4) = (x+4)(x-4+6) = (x+2)(x+4). \end{aligned}$$

$$\text{Ví dụ 4: } x^3 - 7x - 6$$

Ta có thể tách nh- sau:

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } x^3 - 7x - 6 &= x^3 - x - 6x - 6 = x(x^2 - 1) - 6(x+1) \\ &= x(x-1)(x+1) - 6(x+1) = (x+1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x+1)(x^2 - 3x + 2x - 6) = (x+1)[x(x-3) + 2(x-3)] \\ &= (x+1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } x^3 - 7x - 6 &= x^3 - 4x - 3x - 6 = x(x^2 - 4) - 3(x+2) \\ &= x(x-2)(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x+2)(x^2 - 3x + x - 3) = (x+2)(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 3: } x^3 - 7x - 6 &= x^3 - 27 - 7x + 21 = (x-3)(x^2 + 3x + 9 - 7) \\ &= (x-3)(x^2 + 3x + 2) = (x-3)(x^2 + x + 2x + 2) \\ &= (x-3)(x+2)(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 4: } x^3 - 7x - 6 &= x^3 + 1 - 7x - 7 = (x+1)(x^2 - x + 1) - 7(x+1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1 - 7) \\ &= (x+1)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x^2 - 3x + 2x - 6) \\ &= (x+1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 5: } x^3 - 7x - 6 &= x^3 + 8 - 7x - 14 = (x+2)(x^2 - 2x + 4 - 7) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x - 3) = (x+2)(x^2 + x - 3x - 3) \\ &= (x+2)(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 6: } x^3 - 7x - 6 &= x^3 - 9x + 2x - 6 = x(x-3)(x+3) + 2(x-3) \\ &= (x-3)(x^2 + 3x + 2) = (x-3)(x+1)(x+2). \end{aligned}$$

Chú ý: Cần l- u ý học sinh khi phân tích đa thức này phải triệt để, tức là kết quả cuối cùng không thể phân tích đ- ợc nữa. Tất nhiên yêu cầu trên chỉ có tính chất

t-ong đối vì nó còn phụ thuộc tập hợp số mà ta đang xét. Nếu phân tích không triệt để học sinh có thể gặp tình huống là mỗi cách phân tích có thể có một kết quả khác nhau. Chẳng hạn ở bài tập trên cách 1, cách 4 có thể cho ta kết quả là:

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x^2 - x - 6).$$

Cách 2, cách 5 cho kết quả là:

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 2)(x^2 - 2x - 3)$$

Cách 3, cách 6 cho kết quả là:

$$x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x^2 + 3x + 2)$$

Giáo viên cần nhấn mạnh cho học sinh chú ý sau:

- Một đa thức dạng $ax^2 + bx + c$ chỉ phân tích đ-ợc thành nhân tử trong tập hợp Q khi đa thức đó có nghiệm hữu tỉ $\Leftrightarrow \Delta$ (hoặc Δ') là một số chính ph-ong (trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\Delta' = b^2 - ac$))

- Một đa thức dạng $ax^2 + bx + c$ tách làm xuất hiện hằng đẳng thức đ-ợc khi : Δ (hoặc Δ') là một số chính ph-ong và chứa 2 trong 3 hạng tử của $A^2 + 2AB + B^2$ hoặc $A^2 - 2AB + B^2$

Ví dụ 5: $bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b)$. Đa thức trên ta có thể dự đoán có 1 nhân tử là $b + c$ hoặc $c - a$ hoặc $a + b$.

Ta có các cách phân tích nh- sau:

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } & bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b) \\ & = bc(b + c) + ac^2 - a^2c - a^2b - ab^2. \\ & = bc(b + c) + (ac^2 - ab^2) - (a^2c + a^2b) \\ & = bc(b + c) + a(c - b)(c + b) - a^2(c + b) \\ & = (b + c)(bc + ac - ab - a^2) \\ & = (b + c)[(bc - ab) + (ac - a^2)] = (b + c)[b(c - a) + a(c - a)] \\ & = (b + c)(b + a)(c - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } & bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b) \\ & = b^2c + bc^2 + ac(c - a) - a^2b - ab^2 \\ & = ac(c - a) + b^2(c - a) + b(c^2 - a^2) \\ & = ac(c - a) + b^2(c - a) + b(c - a)(c + a) \\ & = (c - a)(ac + b^2 + bc + ab) \\ & = (c - a)(a + b)(c + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 3: } & bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b) \\ & = b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - ab(a + b) \\ & = c(b^2 - a^2) + c^2(a + b) - ab(a + b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c(b - a)(a + b) + c^2(a + b) - ab(a + b) \\
&= (a + b)(cb - ca + c^2 - ab) = (a + b)[c(b + c) - a(c + b)] \\
&= (a + b)(b + c)(c - a)
\end{aligned}$$

Cách 4: Nhận xét: $c - a = (b + c) - (a + b)$

$$\begin{aligned}
&bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b) \\
&= bc(b + c) + ac(b + c) - ac(a + b) - ab(a + b) \\
&= c(b + c)(b + a) - a(a + b)(c + b) \\
&= (b + c)(a + b)(c - a)
\end{aligned}$$

Cách 5: Nhận xét: $b + c = (c - a) + (a + b)$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b) \\
&= bc(c - a) + bc(a + b) + ac(c - a) - ab(a + b). \\
&= c(c - a)(b + a) + b(a + b)(c - a) = (a + b)(c - a)(c + b).
\end{aligned}$$

Cách 6: Nhận xét: $a + b = (b + c) - (c - a)$

$$\begin{aligned}
&bc(b + c) + ac(c - a) - ab(b + c) + ab(c - a) \\
&= b(b + c)(c - a) + a(c - a)(c + b) \\
&= (c - a)(c + c)(b + a).
\end{aligned}$$

Ví dụ 6: $a^5 + a + 1$.

Số mũ của a từ 5 xuống 1 nên giữa a^5 và a cần có những số hạng với số mũ trung gian để nhóm số hạng làm xuất hiện nhân tử chung.

Cách 1:

$$\begin{aligned}
&a^5 + a + 1 \\
&= a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 \\
&= a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1 \\
&= a^3(a^2 + a + 1) - a^2(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 \\
&= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)
\end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}
&a^5 + a + 1 \\
&= a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) \\
&= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1).
\end{aligned}$$

2 - Phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$.

Đặt $x = b - c$; $y = c - a$; $z = a - b$.

Ta thấy: $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$

$$\begin{aligned}
&(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 \\
&= x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + (-x - y)^3 \\
&= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = -3xy(x + y)
\end{aligned}$$

$$= 3xyz = 3(b - c)(c - a)(a - b)$$

Ví dụ 2: $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

Thông thường khi gặp bài toán này học sinh thường thực hiện phép nhân đa thức với đa thức sẽ được đa thức bậc 4 với năm số hạng. Phân tích đa thức bậc 4 với năm số hạng này thường rất khó và dài dòng. Nếu chú ý đến đặc điểm của đề bài: Hai đa thức $x^2 + x + 1$ và $x^2 + x + 2$ chỉ khác nhau bởi hạng tử tự do, do đó nếu ta đặt $y = x^2 + x + 1$ hoặc $y = x^2 + x$ thì biến đổi đa thức thành đa thức bậc hai sẽ đơn giản hơn nhiều.

Đặt $y = x^2 + x + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = y(y + 1) - 12 = y^2 + y - 12 \\ & = y^2 + 4y - 3x - 12 = (y + 4)(y - 3) \\ & = (x^2 + x + 1 + 4)(x^2 + x + 1 - 3) = (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2) \\ & = (x^2 + x + 5)(x^2 + 2x - x - 2) = (x^2 + x + 5)(x + 2)(x - 1) \\ & = (x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5). \end{aligned}$$

Ví dụ 3: $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$

Nhận xét: Ta có: $1 + 7 = 3 + 5$ cho nên nếu ta nhân các thừa số $x + 1$ với $x + 7$ và $x + 3$ với $x + 5$ ta được các đa thức có phần biến giống nhau.

$$\begin{aligned} & (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15 \\ & = (x^2 + 7x + x + 7)(x^2 + 5x + 3x + 15) + 15 \\ & = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15. \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 8x + 7 = y$ ta được:

$$\begin{aligned} & y(y + 8) + 15 \\ & = y^2 + 8y + 15 \\ & = y^2 + 3y + 5y + 15 \\ & = (y + 3)(y + 5) \\ & = (x^2 + 8x + 7 + 3)(x^2 + 8x + 7 + 5) \\ & = (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) \\ & = (x^2 + 6x + 2x + 12)(x^2 + 8x + 10) \\ & = (x + 6)(x + 2)(x^2 + 8x + 10) \end{aligned}$$

3- Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tìm nghiệm của đa thức.

a) Cách tìm nghiệm của một đa thức

-Phương pháp tìm nghiệm nguyên của đa thức: Nghiệm nguyên (nếu có) của một đa thức phải là ước của hạng tử tự do.

VD. Tìm nghiệm nguyên của đa thức sau:

$$x^3 + 3x^2 - 4$$

Giải: C1) Các ước của 4 là : 1;2;4;-1;-2;-4 .Thử các giá trị này ta thấy $x = 1$ và $x = -2$ là nghiệm của đa thức đã cho.

C2) Tổng các hệ số của đa thức bằng 0 nên đa thức đã cho có nghiệm $x = 1$.

- Phương pháp tìm nghiệm hữu tỉ của một đa thức: Trong đa thức với hệ số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do; q là ước dương của số hạng có bậc cao nhất.

VD Tìm nghiệm của đa thức sau:

$$2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$$

Giải: Các ước của 3 là : 1;-1;3;-3 (p)

Các ước dương của 2 là : 1;2 (q)

Xét các số $\pm 1; \pm 3; \pm 1/2; \pm 3/2$ ta thấy $-3/2$ là nghiệm của đa thức đã cho.

Chú ý:

-Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức đó có một nghiệm bằng 1.

Ví dụ: Đa thức

a) $3x^4 - 4x + 1$ có $3 + (-4) + 1 = 0$ nên có một nghiệm $x = 1$.

b) $4x^3 + 5x^2 - 3x - 6$ có $4 + 5 + (-3) + (-6) = 0$ nên có một nghiệm $x = 1$.

- Nếu đa thức có tổng các hệ số của số hạng bậc chẵn bằng tổng các hệ số của số hạng bậc lẻ thì đa thức đó có một nghiệm là -1 .

Ví dụ: Đa thức a) $4x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 11x^2 + 2x - 3$

Tổng các hệ số của số hạng bậc chẵn bằng : $5 + 11 + (-3) = 13$

Tổng các hệ số của số hạng bậc lẻ bằng : $4 + 7 + 2 = 13$

Ta thấy tổng các hệ số của số hạng bậc chẵn bằng tổng các hệ số của số hạng bậc lẻ nên đa thức đó có một nghiệm là -1

$$b) x^3 + 3x^2 + 6x + 4$$

Tổng các hệ số của số hạng bậc chẵn bằng : $3 + 4 = 7$

Tổng các hệ số của số hạng bậc lẻ bằng : $1 + 6 = 7$

Ta thấy tổng các hệ số của số hạng bậc chẵn bằng tổng các hệ số của số hạng bậc lẻ nên đa thức đó có một nghiệm là -1

b) Phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tìm nghiệm của đa thức.

Nếu đa thức $F(x)$ có nghiệm $x=a$ thì sẽ chứa nhân tử $x-a$ do đó khi phân tích cần làm xuất hiện các nhân tử chung sao cho có nhân tử $x-a$.

VD: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử.

a. $x^3 + 3x^2 - 4$

b. $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$

Giải :

a)C1 Đa thức $x^3 + 3x^2 - 4$ có nghiệm là $x= 1$ nên chứa nhân tử $x-1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } x^3 + 3x^2 - 4 &= x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 \\ &= x^2(x-1) + 4x(x-1) + 4(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x-1) (x+2)^2 \end{aligned}$$

C2 Đa thức $x^3 + 3x^2 - 4$ có nghiệm là $x= -2$ nên chứa nhân tử $x + 2$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x^3 + 3x^2 - 4 &= x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 2x - 4 \\ &= x^2(x+2) + x(x + 2) - 2(x+2) \\ &= (x+2) (x^2 + x - 2) \\ &= (x+2) (x^2 - x + 2x - 2) \\ &= (x+2)[x(x-1) + 2(x-1)] \\ &= (x+2)(x-1)(x+2) = (x-1) (x+2)^2 \end{aligned}$$

c) Đa thức $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ có nghiệm là $x = -3/2$ nên chứa nhân tử $2x+3$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 &= 2x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 3x + 2x + 3 \\ &= x^2(2x + 3) + x(2x+3) + (2x+3) \\ &= (2x+3) (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

II> Các dạng bài tập ứng dụng phân tích đa thức thành nhân tử .

Dạng 1: Rút gọn biểu thức

Để giải bài toán rút gọn một biểu thức đại số (dạng phân thức) ta phải phân tích tử thức ,mẫu thức thành nhân tử rồi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của chúng.

Ví dụ: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x - 4x - 19x + 106x - 120}{x + 7x - x - 67x - 60}$$

Giải : Ta có

$$A = \frac{x - 4x - 19x + 106x - 120}{x + 7x - x - 67x - 60}$$

Ta thấy tử thức của phân thức có các nghiệm là 2; 3 ; 4 ; -5

Mẫu thức của phân thức có các nghiệm là -1 ; 3 ; -4;-5

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &= \frac{x - 4x - 19x + 106x - 120}{x + 7x - x - 67x - 60} \\ A &= \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x + 5)}{(x + 1)(x - 3)(x + 4)(x + 5)} \\ A &= \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x + 1)(x + 4)} \end{aligned}$$

Ví dụ 2 :Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{x+3x-4}{x+x-2}$$

Giải: Ta thấy tử thức có nghiệm là 1; mẫu thức cũng có nghiệm là 1 ;nên ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{x+3x-4}{x+x-2} = \frac{x-x+x-x+4x-4}{x-x+2x-2x+2x-2} \\ &= \frac{x+x+4}{x+2x+2}. \text{Ta thấy cả tử và mẫu đều không phân tích đ- ợc nữa.} \end{aligned}$$

Dạng 2 : Chứng minh chia hết

Để giải bài toán chứng minh đa thức A chia hết cho đa thức B có nhiều cách giải nh- ng ở đây tôi chỉ trình bày ph- ong pháp vận dụng phân tích đa thức thành nhân tử để giải.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x ,ta có:

$$[(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) +15] \div (x+6)$$

$$\begin{aligned} \text{Giải: Ta có } &(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) +15 \\ &= (x+1)(x+7) (x+3)(x+5)+15 \\ &= (x^2 + 8x +7) (x^2 + 8x +15) + 15 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 8x +11$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (t - 4)(t + 4) +15 &= t^2 - 1 \\ &= (t + 1)(t - 1) \end{aligned}$$

Thay $t = x^2 + 8x +11$, ta có

$$\begin{aligned} &(x^2 + 8x + 12) (x^2 + 8x +10) \\ &(x^2 + 8x +10)(x +2)(x + 6) \div (x+6). \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x ta có

$$(4x + 3)^2 - 25 \text{ chia hết cho } 8.$$

Cách 1: Ta phân tích biểu thức $(4x + 3)^2 - 25$ ra thừa số

$$\begin{aligned} (4x + 3)^2 -25 &= (4x + 3)^2 - 5^2 = (4x + 3 + 5) (4x + 3 - 5) \\ &= (4x + 8) (4x - 2) = 4 (x + 2) 2 (2x - 1) = 8 (x + 2) (2x - 1) \end{aligned}$$

Do x là số nguyên nên $(x + 2) (2x - 1)$ là số nguyên.

Do đó $8 (x + 2) (2x - 1)$ chia hết cho 8. Ta suy ra ĐPCM.

Cách 2: $(4x + 3)^2 - 25$

$$\begin{aligned} &= 16x^2 + 24x + 9 - 25 \\ &= 16x^2 + 24x - 16 \\ &= 8 (2x^2 + 3x - 2). \end{aligned}$$

Vì x là số nguyên nên $2x^2 + 3x - 2$ là số nguyên

Do đó $8 (2x^2 + 3x - 2)$ chia hết cho 8.Ta suy ra ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n biểu thức.

$A = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ là số nguyên.

Ta có: $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} = \frac{2n + 2n^2 + 2^3}{6}$

Muốn chứng minh biểu thức là số nguyên chỉ cần chứng minh $2n + 3n^2 + n^3$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Ta có: $2n + 3n^2 + n^3 = n(2 + 3n + n^2)$
 $= n(2 + 2n + n + n^2) = n[2(1 + n) + n(1 + n)]$
 $= n(n + 1)(n + 2).$

Ta thấy $n(n + 1)(n + 2)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên ít nhất có một thừa số chia hết cho 2 và một thừa số chia hết cho 3. Mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên tích này chia hết cho 6.

Vậy mọi số nguyên n biểu thức $A = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ là số nguyên.

Ví dụ 4: Chứng minh đa thức: $x^{50} + x^{49} + \dots + x^2 + x + 1$ chia hết cho đa thức $x^{16} + x^{15} + \dots + x^2 + x + 1$.

Ta thấy đa thức bị chia có 51 số hạng, đa thức chia có 17 số hạng, ta phân tích đa thức bị chia nh- sau:

$x^{50} + x^{49} + \dots + x^2 + x + 1$
 $= (x^{50} + x^{49} + \dots + x^{35} + x^{34}) + (x^{33} + x^{32} + \dots + x^{18} + x^{17}) + x^{16} \dots x^2 + x + 1.$
 $= (x^{34})(x^{16} + x^{15} + \dots + x^2 + x + 1) + x^{17}(x^{16} + x^{15} + \dots + x^2 + x + 1)$
 $\quad + x^{16} \dots + x^2 + x + 1$
 $= (x^{16} + x^{15} + \dots + x^2 + x + 1)(x^{34} + x^{17} + 1)$

Rõ ràng: $x^{50} + x^{49} + \dots + x^2 + x + 1$ chia hết cho $x^{16} + x^{15} + \dots + x + 1$. Kết quả của phép chia là : $x^{34} + x^{17} + 1$

Ví dụ 5: Chứng minh đa thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ chia hết cho đa thức $a + b + c$

Đặt $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; $B = a + b + c$. Dự đoán đa thức A phân tích thành nhân tử có một nhân tử là $a + b + c$.

Ta có: $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
 $= a^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^3 + b^2c + c^2a + c^2b + c^3 - a^2b - ab^2 - abc - a^2c - acb - ac^2 - acb - b^2c - bc^2$
 $= a^2(a+b+c) + c^2(a + b + c) - ab(a + b + c) - ac(a + b + c) - bc(a + b + c)$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
 $= B.(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Vậy đa thức A chia hết cho đa thức B.

?Ví dụ 6: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

CMR: $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$ với n lẻ.

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$

$$\Rightarrow (cb + ac + ab) (a + b + c) = abc.$$

$$\Rightarrow abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc = abc$$

$$\Rightarrow (abc + b^2c) + (bc^2 + ac^2) + (a^2c + abc) + (a^2c + ab^2) = 0$$

$$\Rightarrow bc(a+b) + c^2(a+b) + ac(a+b) + ab(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(bc + c^2 + ac + ab) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)[c(b+c) + a(b+c)] = 0 \rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

$$\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=- \text{ hoặc } b+c=0 \Rightarrow b=-c$$

Hoặc $a+c=0 \Rightarrow a=-c$

Vì n lẻ nên $a^2 = -b^n$ hoặc $b^n = -c^2$ hoặc $a^n = -c^n$

Thay vào ta suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 3: Áp dụng phân tích đa thức thành nhân tử để giải một số dạng phương trình.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên d-ong của ph-ong trình.

$$3x^2 + 10xy + 8y^2 = 96$$

$$\text{Ta có: } 3x^2 + 10xy + 8y^2 = 3x^2 + 4xy + 6xy + 8y^2$$

$$= x(3x + 4y) + 2y(3x + 4y) = (3x + 4y)(x + 2y) = 96$$

$$\text{Ta có: } 96 - 1.96 = 2.48 = 3.32 = 4.24 = 8.12 = 6.16$$

$$\text{Mà } x, y > 0 \Rightarrow 3x + 4y > 7; \quad x + 2y > 3$$

Ta có các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 4y = 16 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Giải hệ (I) ta đ-ợc $x = 16; y = -6$ (Loại).

Giải hệ (II) ta đ-ợc $x = 4; y = 1$ (Loại)

Giải hệ (III) ta đ-ợc $x = 4; y = 6$ (Loại)

Giải hệ (IV) ta đ-ợc $x = -16; y = 14$ (Loại)

Vậy nghiệm của hệ $x = 4; y = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = 4; y = 1$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của ph-ong trình:

$$2x^3 + xy - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 + xy = 7 \Rightarrow x(2x^2 + y) = 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x = 7 \\ 2x^2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -97 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ 2x^2 + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x = -7 \\ 2x^2 + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -99 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Tìm số nguyên $x > y > 0$ thỏa mãn

$$x^3 + 7y = y^3 + 7x$$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 - 7x + 7y = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^3 (x^2 + xy + y^2) - 7(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 7) = 0 \quad \text{Vì } x > y > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 7 - 3xy$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = 7 - 3xy$$

$$\Rightarrow 7 - 3xy > 0 \Rightarrow 3xy < 7 \Rightarrow xy < \frac{7}{3}$$

$$x \cdot y \leq 2 \Rightarrow x = 2; y = 1$$

b) Giải phương trình bậc cao

Ví dụ 1: Giải ph-ong trình

$$(3x - 5)^2 - (x - 1)^2 = 0$$

Giải: Ta có:

$$(3x - 5)^2 - (x - 1)^2 = 0$$

$$(3x - 5 + x - 1)(3x - 5 - x + 1) = 0$$

$$(4x - 6)(2x - 4) = 0$$

$$4x - 6 = 0 \text{ hoặc } 2x - 4 = 0$$

$$x = 3/2$$

$$x = 2$$

Vậy nghiệm của ph-ong trình đã cho là $x = 3/2$ hoặc $x = 2$

Ví dụ 2: Giải ph-ong trình

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$$

Giải: Ta có

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 2(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

hoặc $(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$

hoặc $(x^2 + 2x + 2) = 0$ không có giá trị nào của $x \in \mathbf{Q}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1$

III - Bài tập:

Phân tích đa thức thành nhân tử.

1) $x^3 - 4x^2 + 8x - 8$

2) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + 2xyz$

3) $x^2 + 7x + 10$

4) $y^2 + y - 2$

5) $n^4 - 5n^2 + 4$

6) $15x^3 + x^2 - 2n$

7) $bc(b - c) - ac(a - c) + ab(a - b)$

8) $ab(a - b) - ac(a + c) + bc(2a + c - b)$

9) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

10) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$

11) $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) - 2$

12) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3$

13) Tính nhanh số trị của biểu thức sau với.

a) $x = -5\frac{3}{4}$ $P = (x + 2)^2 - 2(x + 2)(x - 8) + (x - 8)^2$

b) $a = 5,75$; $b = 4,25$

$Q = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

14) CMR biểu thức $(2n + 3)^2 - 9$ chia hết cho 4 với mọi n nguyên.

15) CM biểu thức $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ là số nguyên với mọi số chẵn n .

16) Chứng minh đa thức: $x^{79} + x^{78} + \dots + x^2 + x + 1$ chia hết cho đa thức $x^{19} + x^{18} + \dots + x^2 + x + 1$